ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 12 ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА 1967

УДК 62—506

САМОНАСТРАИВАЮЩИЙСЯ КВАНТИЗАТОР

Энрико Одетти

Как известно, квантизатор представляет собой динамическую систему без памяти, которая преобразует непрерывную входную величину в дискретную выходную величину. Характеристика самого общего вида квантизатора состоит из горизонтальных отрезков (уровней) рис. 1. Число уровней N может быть неограниченно (квантизатор без насыщения).

Если N ограничено, как это обычно бывает, то мы говорим о квантизаторе с насыщением. В случае самого простого и известного квантизатора высота и ширина любой ступеньки постоянны (равномерный квантизатор). Более интересно выбрать высоту и ширину каждой ступеньки как функции входного сигнала или статистической характеристики его (неравномерный квантизатор).

В настоящей работе рассмотрен неравномерный квантизатор с насыщением.

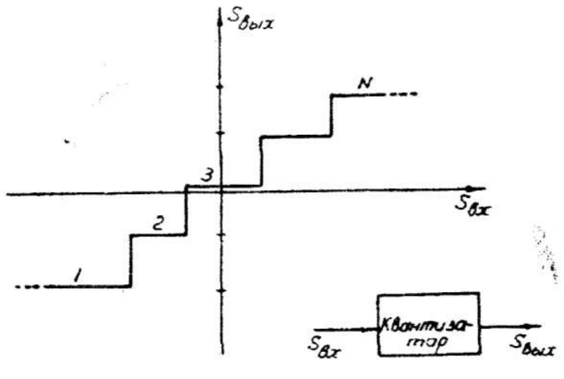

Рис. 1. Характеристика равномерного квантизатора.

Для данных N уровней процесс квантования вполне определен, если установлены конечные точки x_i и x_{i+1} каждого интервала и соответствующий уровень y_i (рис. 2).

С целью определения наилучшим образом величин x_i и y_i введем меру искажения D, вносимого квантованием, как математическое ожидание некоторой выпуклой функции f от разности между входным и выходным сигналом

$$D = M\{f(S_{вх} - S_{вых})\}. \quad (1)$$

Так как плотность распределения вероятностей ошибки $(S_{вх} - S_{вых})$ равна плотности распределения $p(x)$ входного сигнала, то мы можем записать

$$D = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x - y_i) p(x) dx, \quad (2)$$

где $x_1 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$ и x—входной сигнал.

Наилучшие значения x_i и y_i должны минимизировать D

$$\min_{\substack{x_i \\ y_i}} D \to x_i^*,\ y_i^*. \quad (3)$$

В том случае, когда плотность распределения заранее известна, задача может считаться решенной, если не обращать внимания на возможную сложность вычислений. В противном случае, если функция распределения $p(x)$ неизвестна, то мы можем использовать способ самонастройки (самонастраивающийся квантизатор).

Предположим, что величины x_i, y_i могут принимать любые значения, и их начальные значения равны

$$\begin{array}{ll} x_i[0] & i = 2, \ldots, N, \\ y_i[0] & i = 1, \ldots, N. \end{array}$$

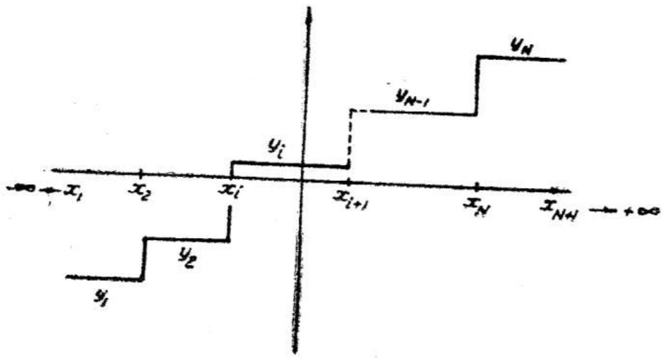

Рис. 2. Характеристика неравномерного квантизатора.

Настройка квантизатора осуществляется с помощью специального устройства, которое мы называем „адаптором" (рис. 3). Адаптор постепенно изменяет величины x_i и y_i для того, чтобы добиться оптимальных значений x_i^* и y_i^*.

Предположим, что изменения осуществляются дискретно по времени, тогда мы можем записать соотношение между входом и выходом как:

$$\left.\begin{array}{l} x[n] \\ x_i[n-1],\ y_i[n-1] \end{array}\right\} \rightarrow x_i[n],\ y_i[n]. \tag{4}$$

В работе устанавливаются соотношения вход—выход адаптора (4) только символически на основе метода стохастической аппроксимации. Как известно, метод стохастической аппроксимации позволяет найти экстремальные значения функционала (2) в том случае, когда априорно известная плотность распределения $p(x)$ удовлетворяет некоторым условиям, которые мы здесь не приводим. Для минимизации D при постоянном N продифференцируем по x_i и y_i и приравняем производные нулю

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = f(x_i - y_{i-1})p(x_i) - f(x_i - y_i)p(x_i) = 0; \tag{5}$$
$$i = 2, \ldots, N$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_i} = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x - y_i)p(x)dx = 0. \tag{6}$$
$$i = 1, \ldots, N$$

Из (5) получаем (когда $p(x_i) \neq 0$):

$$f(x_i - y_{i-1}) = f(x_i - y_i). \tag{7}$$
$$i = 2, \ldots, N$$

Заметим, что последнее соотношение не зависит от $p(x)$ в противоположность соотношению (6). Учитывая соотношение (7), условие минимизации может быть записано в виде

$$\begin{cases} f(x_i - y_{i-1}) = f(x_i - y_i), \\ \min\limits_{y_i} D \to x_i^*, \ y_i^*, \end{cases} \tag{8}$$

где сейчас минимум ищется только по y_i ($i=1, \ldots N$). Соотношения (7) представляют собой дополнительные условия.

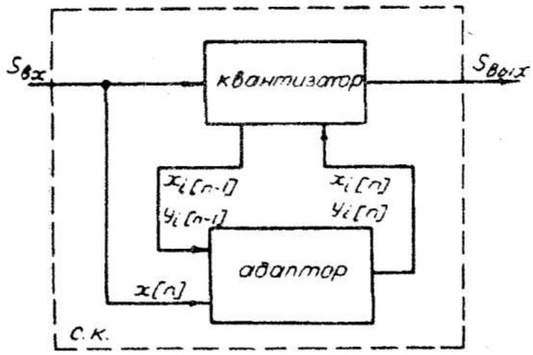

Рис. 3. Структура самонастраивающегося квантизатора.

Предполагая, что существует только одно решение системы (8), найдем его с помощью метода стохастической аппроксимации.

Обозначим

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Тогда

$$\min_{\bar{c}} D(\bar{c}) = \min_{\bar{c}} M_x\{f(\bar{c}, x)\} \to \bar{c}^*. \tag{10}$$

Мы не пишем снова условий (7), относительно которых предполагается, что они всегда выполняются. $\bar{c}^*$ будет решением следующего уравнения:

$$\Delta D(\bar{c}) = M_x\{\nabla_{\bar{c}} f(\bar{c}, x)\} = 0. \tag{11}$$

Будем решать последние уравнения с помощью следующего алгоритма стохастической аппроксимации:

$$\bar{c}[n] = \bar{c}[n-1] - \gamma[n] \nabla_{\bar{c}} f(x[n], \ \bar{c}[n-1]), \tag{12}$$

где $\gamma[n]$—последовательность положительных чисел, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n] = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] < \infty. \tag{13}$$

Для того, чтобы фактически определить x_i и y_i, возьмем $f(0)$ в виде квадратичной функции. Вычисляя $\nabla_{\bar{c}} f$, мы получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = -2(x - y_i)\varepsilon_{\substack{x_i \\ x_{i+1}}}(x), \qquad i = 1, \ldots N \tag{14}$$

где

$$\varepsilon_{\substack{x_i \\ x_{i+1}}}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leqslant x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Теперь можно написать подробно алгоритм (12), учитывая условия (7)

$$\begin{gathered} f(x_i - y_{i-1}) = f(x_i - y_i), \\ (x_i - y_{i-1})^2 = (x_i - y_i)^2, \\ x_i = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \\ i = 2, \ldots N \end{gathered} \tag{15}$$

или

$$\left\{\begin{aligned} & x_2[n] = \frac{y_1[n] + y_2[n]}{2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_N[n] = \frac{y_{N-1}[n] + y_N[n]}{2}, \\ & \begin{bmatrix} y_1[n] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N[n-1] \end{bmatrix} + 2\gamma[n] \begin{bmatrix} (x[n] - y_1[n-1])\varepsilon_{\substack{x_1 \\ x_2[n-1]}}(x[n]) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n] - y_N[n-1])\varepsilon_{\substack{x_N[n-1] \\ x_{N+1}}}(x[n]) \end{bmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{12'}$$

где всегда $x_1 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$.

Как известно, от $\gamma[n]$ зависит как сходимость, так и скорость сходимости процесса самонастройки.

Для того, чтобы определить однозначно $\gamma[n]$, мы поставим дополнительные условия, чтобы итеративный процесс сходился наилучшим образом.

Критерий качества алгоритма состоит в следующем: этот функционал $D(\bar{c}) = M_x\{(S_{вх} - S_{вых})^2\}$ заменяется эмпирическим

$$V_э^2[n] = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}(x[m] - y_i[n])^2 \varepsilon_{\substack{x_i[n-1] \\ x_{i+1}[n-1]}}(x[m]). \tag{16}$$

Положим

$$\min_{\gamma[n]} V_э^2[n] \to \gamma^2[n], \tag{17}$$

т. е.

$$\frac{dV_э^2[n]}{d\gamma[n]} = 0. \tag{18}$$

Заменив в (16) $y_i[n]$, в силу алгоритма (12′), получаем

$$V_э^2[n] = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}(x[m] - (y_i[n-1] + 2\gamma[n](x[n] - \\ - y_i[n-1])\varepsilon_{\substack{x_i[n-1] \\ x_{i+1}[n-1]}}(x[n])))^2 \varepsilon_{\substack{x_i[n-1] \\ x_{i+1}[n-1]}}(x[m]).$$

Следовательно, уравнение (18) примет вид

$$\frac{dV_э^2[n]}{d\gamma[n]} = -\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}[x[m]-(y_i[n-1]+2\gamma[n](x[n]-y_i[n-1]))]\times$$

$$\times(x[n]-y_i[n-1])\varepsilon_{\substack{x_i[n-1]\\x_{i+1}[n-1]}}(x[n]\varepsilon_{\substack{x_i[n-1]\\x_{i+1}[n-1]}}(x[m])=0. \qquad (18')$$

В (18′) $\varepsilon(x[n])$ обеспечивают существование только одного из слагаемых суммы $\sum_{i=1}^{N}$. При этом должно выполняться условие

$$\sum_{m=1}^{n}[x[m]-(\underline{y}_i[n-1]+2\gamma[n](x[n]-\underline{y}_i[n-1]))](x[n]-\underline{y}_i[n-1])=0 \qquad (19)$$

или

$$\sum_{m=1}^{n}[x[m]-(\underline{y}_i[n-1]+2\gamma[n](x[n]-\underline{y}_i[n-1]))]=0,$$

где $\underline{i}$ определяется из условия

$$\varepsilon_{\substack{\underline{x}_i[n-1]\\ \underline{x}_{i+1}[n-1]}}(x[n])\neq 0. \qquad (20)$$

Отсюда находим оптимальное значение для $\gamma[n]$

$$\gamma^*[n]=\frac{\frac{1}{n^*}\sum_{m=1}^{n}x[m]-\underline{y}_i[n-1]}{2(x[n]-\underline{y}_i[n-1])}, \qquad (21)$$

где суммируются только те $x[m]$, которые принадлежат области $\underline{x}_i[n-1]$, $\underline{x}_{i+1}[n-1]$, для которой $\varepsilon_{\substack{\underline{x}_i[n-1]\\ \underline{x}_{i+1}[n-1]}}(x[m])\neq 0$ и n^* есть число этих значений.

Подставляя $\gamma^*[n]$ в алгоритм, получаем

$$y_i=\frac{1}{n^*}\sum_{m=1}^{n}x[m]. \qquad (22)$$

Это уравнение показывает, что каждый шаг уровня y_i^* равен средней величине всего $x[m]$, который принадлежит к соответствующей области $x_i[n-1]$, $x_{i+1}[n-1]$ предыдущего шага.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Я. З Цыпкину за помощь, которую он оказал мне в написании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З., Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. „Автоматика и телемеханика", 1966, № 1.
2. Joel Max, Quantizing for minimum distorsion. IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-6, March 1960, № 1.
3. Кошелев В. Н. „Квантование с минимальной энтропией". Проблемы передачи информации АН СССР, выпуск 14, 1963.
4. Солодов А. В., Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. Изд-во „Наука", Москва, 1967.
5. Tou J. „Optimum design of digital control systems". Academic Press, 1963.

Рукопись поступила 12. IX. 1967 г.